УДК 539.12.01

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ГЛЮОННОЙ ВЕРШИНЫ В НЕКОТОРЫХ ОДНОЗНАЧНЫХ КАЛИБРОВКАХ

С.А.Гаджиев, А.Н.Мамедов*, Л.С.Гаджиева**

Предлагается методика расчета функции распространения свободного глюона и трехглюонной вершины для однозначных калибровок. Показано, что глюонные вершины можно определить с помощью эффективного действия, которое возникает при интегрировании по мере Хаара.

Calculation of Green Functions and Gluon Top in Some Unambiguous Gauges

S.A.Gadjiev, A.N.Mamedov, L.S.Gadjieva

A method for calculation of the Green functions of free gluon and three-gluon top for unambiguous gauges is proposed. It is shown that one can define the gluon tops by using an effective act which arises at the integration with respect to the measure of Haar.

Квантование калибровочных теорий сопровождается выбором определенного калибровочного условия, которое позволяет «исключить» из квантования нефизические степени свободы и получить выражение для производящего функционала, который приводит к унитарной S-матрице в пространстве физических степеней свободы.

Однако В.Грибов [1,2] показал, что ряд калибровок, в частности кулоновская калибровка ($\partial_i A_i = 0$), обладает вне рамок теории возмущений неоднозначностью, т.е. при достаточно больших значениях потенциала калибровочное условие

$$\partial_i A_i^g = \partial_i (g^{-1} A_i g + g^{-1} \partial_i g) = 0$$

имеет целое семейство решений для калибровочных функций $g(x)$ при заданном поле $A_i(x)$. Другими словами, поверхность калибровки $\partial_i A_i^g = 0$ пересекает заданную орбиту группы не один, а бесконечное число раз. Результаты В.Грибова были проанализированы в работах [3—5] для более широкого класса калибровок, а в работе [6] проведен анализ грибовской неоднозначности в рамках гармонических отображений.

*Бакинский государственный университет, Азербайджанская Республика

Имеется целый ряд глобальных калибровок, не приводящих к неоднозначностям. Такие калибровки снимают вырождение свободного лагранжиана и в то же время не являются полными калибровками, т.е. они обладают остаточной симметрией, которую необходимо в конечном счете устранить для выделения физических степеней свободы в континуальном представлении для производящего функционала [7].

В данной статье предлагается метод расчета функции распространения свободного глюона и трехглюонной вершины в неабелевой калибровочной теории для однозначных калибровок:

$$n_\mu A_\mu = 0, \quad n_\mu {}^\circ A_\mu = 0, \quad D_\mu {}^\circ A_\mu = 0.$$

Пусть имеется некий калибровочно-инвариантный функционал. Среднее значение этого функционала определим следующим образом:

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = \int e^{-S(A)} \Phi(A) DA.$$

Для обеспечения сходимости этого интеграла воспользуемся анзацем Фаддеева — Попова с введением меры Хаара

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = \frac{\int e^{-S(A)} \Phi(A) \int d\mu(g) \delta(F(A))}{\int d\mu(g) \delta(F(A))}.$$

Здесь $S(A)$ — основное действие; $F(A)$ — функция, фиксирующая калибровку; а $d\mu(g)$ — левоинвариантная мера Хаара, определенная на локально компактной группе G. Отметим, что введение меры Хаара позволяет провести интегрирование по одному представителю из каждого класса калибровочно-эквивалентных полей [8].

Обозначим через $\Delta(A)$ следующую величину

$$\Delta^{-1}(A) = \int \delta(F(A)) d\mu(g),$$

которая обеспечивает нормировку функционального интеграла.

Таким образом, континуальное представление для вакуумного среднего от калибровочно-эквивалентного функционала записывается в следующем виде:

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = \int e^{-S(A)} \Phi(A) DA d\mu(g) \delta(F(A)) \Delta(a). \qquad (1)$$

В дальнейшем мы часто будем использовать представление (1).

1. Калибровка $n_\mu A_\mu = 0$

Здесь мы определяем функцию распространения и трехглюонную вершину в калибровке $n_\mu A_\mu = 0$. В этом случае $F(A) = n_\mu A_\mu = 0$. Все рассмотрение проводится в евклидовом пространстве и $n_\mu^2 = 1$. Центральная проблема — это выделение основных орбит группы. Совершим калибровочное преобразование:

$$A_\mu \to A_\mu^g = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g,$$

где $g = g(x)$, $A^g_\mu(x) = A_\mu(x, a_i)$; здесь a_i — параметры группы. В результате получаем расслоение пространства. Следовательно, неабелева калибровочная теория реализует геометрию расслоенного пространства, и представление (1) имеет вид

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = N \int DA e^{-S(A^g)} \Phi(A^g) d\mu(g) \delta(g^{-1}(n_\mu A_\mu - u)g). \qquad (2)$$

Теперь проведем интегрирование по мере Хаара, используя левоинвариантность $d\mu(g)$. В качестве левого сдвига выбирается функционал $\exp\{-(1/2\alpha)\int u \,\Box u d^4_x\}$, тогда $d\mu(g) = \exp\{-(1/2\alpha)\int u\, \Box u d^4_x\} du$, и с помощью δ-функции получаем

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = N \int DA \exp\{-S(A) - \Delta S(A)\},$$

где

$$\Delta S(A) = (1/2\alpha \int (n_\mu A_\mu) \Box_x (n_\nu A_\nu) d^4 x. \qquad (3)$$

Варьируя полное действие $S_{\text{эфф}} = S + \Delta S$, находим уравнение движения свободного глюона:

$$(\Box \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + (1/\alpha) n_\mu n_\nu \Box_x) A_\nu(x) = 0.$$

Функция распространения в импульсном пространстве будет определяться из следующего уравнения:

$$(\delta_{\mu\nu} - (K_\mu K_\nu)/K^2 + (1/\alpha) n_\mu n_\nu) G_{\nu s} = -\delta_{\mu s}/K^2. \qquad (4)$$

Для определения явного вида $G_{\nu s}(k, n)$ предлагаем следующее представление:

$$G_{\nu s} = \beta_1(K)\delta_{\nu s} + \beta_2 K_\nu K_s + \beta_3 n_\nu n_s + \beta_4(n_\nu K_s + n_s K_\nu). \qquad (5)$$

Для вычисления коэффициентов из (4) определяем следующие величины:

$$\begin{aligned} n_\nu n_s G_{\nu s} &= -\alpha/K^2, \\ n_\nu K_s G_{\nu s} &= -\alpha/(nK), \\ K_\nu K_s G_{\nu s} &= 1 - (1+\alpha)K^2/(nK)^2, \\ G_{\nu s} &= (-1/K^2)\,[2 + (1+\alpha)K^2/(nK)^2]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\beta_1 + \beta_2(nK)^2 + \beta_3 + \beta_4(nK) = \alpha/K^2, \\ &\beta_1(nK) + \beta_2(nK)K^2 + \beta_3(nK) + \beta_4(K^2 + (nK)^2) = \alpha/(nK), \\ &\beta_1 K^2 + \beta_2 K^4 + \beta_3(nK)^2 + 2\beta_4 K^2(nK) = 1 - (1+\alpha)K^2/(nK)^2, \\ &4\beta_1 + \beta_2 K^2 + \beta_3 + 2\beta_4(nK) = -(1/K^2)[2 + (1+\alpha)K^2/(nK)^2]. \end{aligned}$$

Решение этой системы приводит к следующему выражению для функции распространения:

$$G_{\nu s} = -(1/K^2)[\delta_{\nu s} + ((1+\alpha)K_\nu K_s)/(nK)^2 - (K_\nu n_s + K_s n_\nu)/(nK)]. \tag{7}$$

Формула (7) представляет собой функцию распространения свободного глюона в калибровке $n_\mu A_\mu = 0$. В работах [9,10] рассматривалась калибровка $n_\mu A_\mu = 0$, и более сложным путем получена формула типа (7) для случая $\alpha = 0$.

Теперь определим трехглюонную вершину. Она определяется как третья вариационная производная от $\ln\langle \Phi(A)\rangle_0$ по потенциалам, в нашем рассмотрении от $\Delta S(A)$. Для удобства в дальнейшем выражение (3) представим в следующем виде:

$$\Delta S(A) = (1/2\alpha)\int (n_\mu A_\mu)(y)\delta(y-x)\Box_x(n_\nu A_\nu)(z)\delta(z-x)d^4x d^4y d^4z,$$

и учтем соотношения:

$$\begin{gathered} D^2G(y,x) = \delta(y-x) \\ D^2G(y,x) \equiv \Box G + gL_1G + g^2L_2G \\ L_1^{ab} = f^{abc}\,[A_\mu^c, \partial_\mu^x]; \quad L_2^{ab} = f^{acp}f^{bdp}A_\mu^c A_\mu^d \\ G = \Sigma_n g^n G_n; \quad \Box G_0 = \delta(y-x); \quad G_0 = \int e^{ik(y-x)}(d^4K/K^2) \\ \Box G_n = -L_1G_{n-1} - L_2G_{n-2}, \quad n \geq 1, \quad \Box G_1 = -L_1G_0, \ldots \end{gathered} \tag{8}$$

В результате получаем выражение для ΔS:

$$\Delta S = (1/2\alpha)\int (n_\mu A_\mu)(y)D^2(y)G(y,x)(n_\nu A_\nu)(z)D^2(z)\Box_x G(z,x)d^4x d^4y d^4z.$$

В этом выражении мы поменяли местами $\Box_x$ и $D^2(x)$. Разлагая $G(y,x)$ в ряд по константе связи, ограничиваемся первой степенью по g. Далее учтем рекуррентное соотношение $\Box G_n = -L_1G_{n-1} - L_2G_{n-2}$ и перейдем в импульсное пространство. В результате приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Delta S = (-ig/2\alpha)\int & n_\mu n_\nu A_\mu A_\nu A_\lambda \exp\{ix(k-q_1-q_2) + iy(p+q_1) + \\ & + iz(q+q_2)\}(q_1-q_2)_\lambda d^4x d^4y d^4z d^4k d^4p d^4q d^4q_1 d^4q_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Интегрируя (9) по $d^4x d^4y d^4z$ и $d^4q_1 d^4q_2$, получим выражение

$$\Delta S(A) = (-ig/2\alpha)\int n_\mu n_\nu A_\mu A_\nu A_\lambda (p-k)_\lambda \delta(k+p+q)d^4k d^4p d^4q.$$

Из требования антисимметричности $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k,p,q)$ относительно перестановки индексов $\mu \text{<–>} \nu$; $l \text{<–>} 2$ и т.д. получим выражение

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k,p,q)=-igf^{abc}\,\{n_\mu n_\nu(k-p)_\lambda+n_\nu n_\lambda(p-q)_\mu+n_\mu n_\lambda(q-k)_\nu\}. \qquad (10)$$

Формула (10) представляет собой трехглюонную вершину в калибровке $n_\mu A_\mu=0$.

2. Калибровка $n_\mu {}^\circ A_\mu=0$

Здесь так же определяется функция распространения и трехглюонная вершина. В этой калибровке выражение (2) имеет вид

$$\langle\,\Phi(A)\,\rangle_0=N\int DAe^{-S(A^g)}\Phi(A^g)d\mu(g)\delta(g^{-1}(n_\mu{}^\circ A_\mu-n_\mu D_\mu\sigma)g),$$

где

$${}^\circ A^g_\mu=g^{-1}({}^\circ A_\mu-D_\mu\sigma)g,\quad D_\mu\equiv\partial_\mu+[A_\mu,\,\ldots]_-,\quad \sigma=g(g^0)^{-1}.$$

Повторяя процедуру вывода формулы (3), получаем

$$\Delta S(A)=(1/2\alpha)\int(n_\mu D_\mu)^{-1}(n^\circ A)\Box_x\,(n_\nu D_\nu)^{-1}(n^\circ A)d^4x= \qquad (11)$$

$$=(1/2\alpha)\int(n_\mu\partial_\mu)^{-1}(n^\circ A)\Box_x\,(n_\nu\partial_\nu)^{-1}(n^\circ A)d^4x.$$

Варьируя полное действие $S_{\text{эфф}}=S+\Delta S$, находим уравнение движения свободного глюона:

$$(\Box\delta_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu+(1/\alpha)n_\mu n_\nu\partial_0^2(n\partial)^{-2}\Box_x\,)A_\nu(x)=0.$$

Функция распространения в импульсном пространстве определяется уравнением

$$\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{K_\mu K_\nu}{K^2}+(1/\alpha)n_\mu n_\nu\frac{K_0^2}{(nK)^2}\right)G_{\nu s}(k,n)=-\frac{\delta_{\mu s}}{K^2}. \qquad (12)$$

Явный вид $G_{\nu s}$ находится так же, как и в калибровке $n_\mu A_\mu=0$, только вместо (6) имеем следующие соотношения:

$$n_\nu n_s G_{\nu s}=-\alpha\frac{(nK)^2}{K^2K_0^2},$$

$$n_\nu K_s G_{\nu s}=-\alpha\frac{(nK)}{K_0^2},$$

$$K_\nu K_s G_{\nu s}=1-\frac{K^2}{(nK)^2}-\alpha\frac{K^2}{K_0^2},$$

$$G_{\nu\nu}=-\frac{1}{K^2}\left[\,2+\frac{K^2}{(nK)^2}+\alpha\frac{K^2}{K_0^2}\right].$$

С помощью этих соотношений и представления (6) составляем систему алгебраических уравнений. Решая ее получаем явный вид функции $G_{\nu s}$:

$$G_{\nu s} = -\frac{1}{K^2}\left[\delta_{\nu s} + \frac{K_\nu K_s}{(nK)^2} + \alpha\frac{K_\nu K_s}{K_0^2} - \frac{K_\nu n_s + K_s n_\nu}{(nK)}\right]. \tag{13}$$

Формула (13) представляет собой функцию распространения свободного глюона в калибровке $n_\mu {}^\circ A_\mu = 0$.

Теперь определим вершинную функцию. С этой целью выражение (11) представим в виде

$$\Delta S(A) = \frac{1}{2\alpha}\int (n_\mu \partial_\mu)^{-1}(y)(n^\circ A)(y)\delta(y-x)\times$$

$$\times \Box_x (n_\nu \partial_\nu)^{-1}(z)(n^\circ A)(z)\delta(z-x)d^4x d^4y d^4z.$$

Учитывая соотношения (8), $\Delta S(A)$ можно записать так

$$\Delta S(A) = \frac{1}{2\alpha}\int (n_\mu \partial_\mu)^{-1}(y)*n^\circ A)(y)D^2(y)\times$$

$$\times G(y,x)\Box_x (n_\nu \partial_\nu)^{-1}(z)(n^\circ A)(z)D^2(z)G(z,x)d^4x d^4y d^4z.$$

Процедура, аналогичная процедуре получения (9), приводит к выражению для $\Delta S(A)$:

$$\Delta S(A) = -\frac{ig}{2\alpha}\int \frac{p_0 q_0}{(np)(nq)} n_\nu n_\lambda (q_1 - q_2)_\mu A_\mu A_\nu A_\lambda \times$$

$$\times \exp\{ix(k - q_1 - q_2) + iy(p + q_1) + iz(q + q_2)\} d^4x d^4y d^4z d^4k d^4p d^4q d^4q_1 d^4q_2.$$

Интегрируя это выражение по пространственным координатам и $d^4q_1 d^4q_2$, получаем

$$\Delta S = -\frac{ig}{2\alpha}\int \frac{p_0 q_0}{(np)(nq)}(p-q)_\mu n_\nu n_\lambda A_\mu A_\nu A_\lambda \delta(k+p+q)d^4k d^4p d^4q.$$

Учитывая антисимметричность $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k,p,q)$ относительно перестановки индексов и частиц, получаем следующую формулу для трехглюонной вершины:

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k,p,q) = -igf^{abc}\left\{\frac{p_0 q_0}{(np)(nq)}(p-q)_\mu n_\nu n_\lambda + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \frac{q_0 K_0}{(nK)(nq)} n_\mu n_\lambda (q-K)_\nu + \frac{K_0 p_0}{(nK)(np)} n_\mu n_\nu (K-p)_\lambda\right\}.$$

Формула (14) представляет собой трехглюонную вершину в калибровке $n_\mu {}^\circ A_\mu = 0$.

3. Калибровка $D_\mu {}^\circ A_\mu = 0$

В этой калибровке калибровочно-инвариантный функционал (1) имеет вид

$$\langle \Phi(A)\rangle_0 = \int d\mu(g) DA_\mu e^{-S(A_\mu)}\Phi(A_\mu)\det D^2_\mu$$

$$S(g^{-1}(D_\mu {}^\circ A_\mu - D^2_\mu \sigma)g); \quad \sigma = g(g^0)^{-1}.$$

После интегрирования по мере Хаара получаем

$$\langle \Phi(A) \rangle_0 = \int DAe^{-S_{\text{эфф}}}\Phi(A) = \int DAe^{-S(H)-\Delta S(A)}\Phi(A),$$

где

$$\Delta S(A) = \frac{1}{2\alpha}\int d^4x(D_\nu^{-2}D_\mu{}^\circ A_\mu)(x)\Box_x(D_\nu^{-2}D_\mu{}^\circ A_\mu)(x).$$

Здесь используется следующая сокращенная запись

$$D_\nu^{-2}(x)(D_\mu{}^\circ A_\mu)(x) = \int D_\nu^{-2}(x)(D_\mu{}^\circ A_\mu)(y)\delta(y-x)d^4y.$$

Учитывая соотношение (8), $\Delta S(A)$ можно представить в виде

$$\Delta S(A) = \frac{1}{2\alpha}\int d^4xd^4yd^4z(D_\mu^{ab\circ}A_\mu)(x)\Box_x(D_\nu^{-2}D_\mu{}^\circ A_\mu)(x). \tag{15}$$

Выражение (15) мы используем при определении трехглюонной вершины. Для нахождения уравнений движения и функции распространения формулу (15) перепишем так:

$$\Delta S = \frac{1}{2\alpha}\int d^4xd^4yd^4z(D_\mu{}^\circ A_\mu)(y)\Box_x^{-1}(\Box_x G(y,x)) \times$$

$$\times \Box_x G(z,x)(D_\nu{}^\circ A_\nu)(z) = \frac{1}{2\alpha}\int (D_\mu{}^\circ A_\mu)(y)\Box_x^{-1}(D_\nu{}^\circ A_\nu)(y)d^4y.$$

Теперь можно проварьировать полное действие по A_μ. В результате получаем уравнение

$$(\Box\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\Box_x^{-1}\partial_0^2)A_\nu(x) = 0,$$

или, переходя к импульсному пространству,

$$\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{K^2} + \frac{K_0^2}{\alpha}\frac{K_\mu K_\nu}{K^4}\right)G_{\nu s} = -\frac{1}{K^2}\delta_{\mu s}. \tag{16}$$

Записывая $G_{\nu s} = \beta_1\delta_{\nu s} + \beta_2 K_\nu K_s$, находим

$$G_{\nu s} = -\frac{\alpha}{K_0^2}\delta_{\nu s},\quad G_{\nu\nu} = -\frac{3}{K^2} - \frac{\alpha}{K_0^2},\quad K_\nu K_s G_{\nu s} = -\alpha\frac{K^2}{K_0^2}.$$

Далее составляем систему алгебраических уравнений, решение которых приводит нас к следующему результату:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{K^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{K^2}\right) - \alpha\frac{K_\mu K_\nu}{K^2 K_0^2}. \tag{17}$$

Формула (17) задает функцию распространения свободного глюона в калибровке $D_\mu{}^\circ A_\mu = 0$.

Теперь определим трехглюонную вершину. При этом мы будем исходить из выражения (15). Разложим $G(y,x)$ по константе связи, ограничиваясь первой степенью по g. Далее используем соотношения (8). В результате выражение (15) приводится к виду

$$\Delta S = \frac{g}{2\alpha}\int d^4xd^4yd^4zG_0(y,x)(D_\mu{}^\circ A_\mu)(y)L_1(x)G_0(z,x)(D_\nu{}^\circ A_\nu(z)).$$

Переходя в импульсное пространство, получаем

$$\Delta S = -\frac{ig}{2\alpha}\int \frac{K_0 p_0}{q_1^2 q_2^2} K_\mu P_\nu (K - q_2)_\lambda \exp\{ix(K - q_1 - q_2) +$$

$$+ iy(q + q_1) + iz(p + q_2)\} A_\mu A_\nu A_\lambda d^4x d^4y d^4z d^4k d^4p d^4q d^4q_1 d^4q_2.$$

Интегрируя выражение для ΔS по пространственным координатам и по d^4q_1, d^4q_2, получим следующую формулу для $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k, p, q)$:

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k, p, q) = -igf^{abc}\{ \frac{K_0 p_0}{(np)K^2 p^2} K_\mu p_\nu (K - p)_\lambda + \tag{18}$$

$$+ \frac{p_0 q_0}{p^2 q^2} p_\nu q_\lambda (p - q)_\mu + \frac{K_0 q_0}{K^2 q^2} K_\lambda q_\mu (K - q)_\nu \}.$$

Формула (18) представляет собой трехглюонную вершину в калибровке $D_\mu{}^\circ A_\mu = 0$. Таким образом, в данной работе нами получены формулы для функции распространения свободного глюона и трехглюонной вершины (7), (10), (13), (14), (17), (18) в калибровках $n_\mu A_\mu = 0$, $n_\mu{}^\circ A_\mu = 0$ и $D_\mu{}^\circ A_\mu = 0$. Эти калибровки являются однозначными. Вычисление функций Грина в отличие от стандартной процедуры сводится к решению простых алгебраических уравнений. Показано, что глюонные вершины можно определить с помощью эффективного действия, которое возникает при интегрировании по мере Хаара.

В заключение авторы выражают благодарность В.Я.Файнбергу за постоянный интерес к нашей работе и обсуждение результатов.

Литература

1. Gribov V.N. — Nucl. Phys. B, 1978, v.1390, p.1.
2. Грибов В.Н. — В сб.: Физика элементарных частиц. XII школа ЛИЯФ, Л.: ЛИЯФ, 1977, с.147.
3. Singer I. — Communs. Math. Phys., 1978, v.60, p.7.
4. Соловьев М.А.— Труды международного семинара. Звенигород-82. 1983, т.1, М.: «Наука», с.129.
5. Логочев М.А. — ТМФ, 1987, т.70, №36, с.412.
6. Соловьев М.А. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.415.
7. Сараджев Ф.М., Файнберг В.Я. — Труды ФИАН, 1986, т.186, с.4.
8. Хаммермаш Т. — Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: МФ, 1966.
9. Dokchitzer V. et al. — Phys. Rev., 1980, v.58, p.269.
10. Siopsis G. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.B-187, No.3-4, p.351.
11. Friedman J., Papastamation J. — Nucl. Phys., 1983, v.1219, p.125.
12. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: «Наука», 1978.
13. Гаджиев С.А., Мамедов А.Н. — Физика, 1995, №3, т.1, Баку, с.20—26.

Рукопись поступила 17 февраля 1998 года.